

## MATERIJAL ZA PETO PREDAVANJE (P05)

iz knjige :

Dr Svetozar V. Vukadinović

### ELEMENTI TEORIJE VJEROVATNOĆE I MATEMATIČKE STATISTIKE,

Privredni pregled, 1986

#### 2.6. OSNOVNE RASPODELE VEROVATNOĆA DISKRETE SLUČAJNE PROMENLJIVE

Razmotrimo raspodole verovatnoća diskrete slučajne promenljive koje su posebno značajne u statistici.

##### 2.6.1. Binomna raspodela

Još na početku formiranja osnovnih pojmovih teorije verovatnoće objašnjena je fundamentalna uloga matematičke šeme, koju je proučio poznati švajcarski matematičar Jakov Bernuli (1654—1705). Ta šema se sastoji u sledećem: izvodi se niz eksperimenata, a u svakom od njih verovatnoća realizacije dogadaja  $A$  je ista i jednaka  $p$ . Za eksperimente se pretpostavlja da su nezavisni, što znači da verovatnoća pojave dogadaja  $A$  u svakom od eksperimenata ne zavisi od toga da li se dogadjaj  $A$  pojavio ili se nije pojavio u drugim eksperimentima (prethodnim ili sledećim).

Označimo sa  $q = 1 - p$  verovatnoću da se u svakom pojedinačnom eksperimentu dogadjaj  $A$  ne realizuje.

Uočimo slučajnu promenljivu  $X$  koja označava broj realizacija dogadaja  $A$ , i najpre pretpostavimo da se eksperiment izvodi jednom. U tom slučaju  $X$  može da uzme samo dve vrednosti: 1 ili 0, zavisno od toga da li se dogadjaj  $A$  pojavio ili nije. Odgovarajuće verovatnoće jednake su:

$$P(X = 1) = p \quad i \quad P(X = 0) = q$$

Znači, raspodela verovatnoća slučajne promenljive  $X$  jednaka je:

$$X = \begin{cases} 0 & 1 \\ q & p \end{cases}$$

a zakon raspodele verovatnoća ima oblik:

$$P(X = x) = p^x q^{1-x}, \quad x = 0, 1$$

Često se ova raspodela naziva i raspodelom „nula-jedan“ ili Bernulijevom raspodelom. Primer za ovu raspodelu je jednostruko bacanje dinara.

Pretpostavimo da se realizuje  $n$  nezavisnih eksperimenata, a u svakom od njih je verovatnoća realizacije dogadaja  $A$  jednaka  $p$ . Onda slučajna promenljiva  $X$  može da uzme vrednosti  $0, 1, 2, \dots, n$ . Treba naći odgovarajuće verovatnoće. Radi toga razmotrimo dogadjaj  $X = x$ , koji znači da se u  $x$  nezavisnih eksperi-

menata pojавио догађај  $A$ , а да се у преосталих  $n-x$  није појавио. Jedna od takvih могућности је:

$$\underbrace{A A \dots A}_{x \text{ puta}}, \underbrace{B B \dots B}_{n-x \text{ puta}}$$

где је  $B = \bar{A}$  — non  $A$ . Како су експерименти независни и  $P(A) = p$ ,  $P(B) = q$ , то је вероватноћа овог догађаја једнака:

$$p p \dots p \ q q \dots q = p^x q^{n-x}$$

Ali, догађај  $A$  може да се појави у произвољним  $x$  од  $n$  могућих експеримената. Број свих различитих начина избора  $x$  елемената од  $n$  једнак је:

$$C_n^x = \binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

Према формулама о вероватноћи збира догађаја, вероватноћа да се догађај  $A$  појави  $x$  пута у  $n$  експеримената, то јест да случајна променљива  $X$  узме вредност  $x$ , једнака је:

$$P(X=x) = P_{n,x,p} = C_n^x p^x q^{n-x} \quad (2.6.1)$$

Raspodela вероватноћа, одређена законом расподеле вероватноћа (2.6.1), назива се *binomnom raspodelom* вероватноћа. Поява догађаја  $A$  често се назива *uspehom*, а догађаја  $\bar{A}$  — *neuspehom*.

Naziv „binomna raspodela“ изведен је из чинjenice да су вероватноће  $P_{n,x,p}$  чланови binomnog razvoja:

$$(q+p)^n = \sum_{x=0}^n \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = q^n + \binom{n}{1} p q^{n-1} + \dots + \binom{n}{n-1} p^{n-1} q + p^n = \sum_{x=0}^n P_{n,x,p}$$

Како је  $p+q=1$ , то је и:

$$\sum_{x=0}^n P_{n,x,p} = 1 \quad (2.6.2)$$

На слици 2.6.1. илустроване су расподеле вероватноћа за  $n=10$  и за разлиčite вредности  $p$ .

Funkcija расподеле binomне случајне променљиве једнака је:

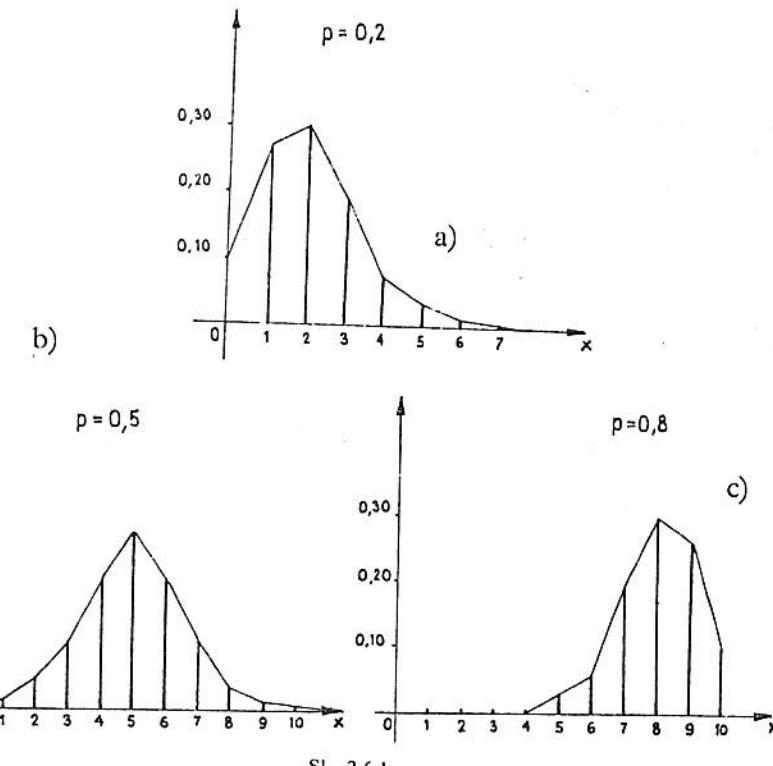
$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{за } x \leq 0 \\ \sum_{k=0}^x \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, & \text{за } 0 < x \leq n \\ 1, & \text{за } x > n. \end{cases}$$

Razmotrićemo вероватноћу  $P_{n,x,p}$  као функцију целобројног аргумента  $x$ . Прирашћењу аргумента  $x$  функција  $P_{n,x,p}$  најпре расте, затим достиже максималну вредност, а онда опада. Ради тога размотримо однос:

$$\frac{P_{n,x+1,p}}{P_{n,x,p}} = \frac{n! p^{x+1} q^{n-x-1}}{(x+1)! (n-x-1)!} : \frac{n! p^x q^{n-x}}{x! (n-x)!} = \frac{n-x}{x+1} \cdot \frac{p}{q} \quad (2.6.2)$$

Очигледно је да је вероватноћа  $P_{n,x+1,p}$  већа од вероватноће  $P_{n,x,p}$ , ако је:

$$\frac{n-x}{x+1} \cdot \frac{p}{q} > 1$$



Sl. 2.6.1.

то јест ако је  $x < np - q$ . На тај начин, вероватноћа  $P_{n,x,p}$  расте када се  $x$  мења од 0 до  $np - q$ . Ако је:

$$\frac{n-x}{x+1} \cdot \frac{p}{q} = 1$$

то јест, ако је  $x = np - q$  (ова једнакост је могућа само у оним случајевима када је  $np - q$  цео ненегативан број), онда је:

$$P_{n,x,p} = P_{n,x+1,p}$$

На крају,  $P_{n,x+1,p} < P_{n,x,p}$  ако је:

$$\frac{n-x}{x+1} \cdot \frac{p}{q} < 1$$

то јест ако је  $x > np - q$ .

Znači, verovatnoća  $P_{n,x,p}$  raste sve dok je  $x$  manje od  $np - q$ ; dostiže maksimum za  $x = np - q$ ; a za vrednosti  $x$  koje su veće od  $np - q$ , opada. Veličina  $np - q$  je *modalna* vrednost binomne slučajne promenljive  $X$ . Ako je veličina  $np - q$  ceo broj, onda postoje dve najverovatnije vrednosti binomne slučajne promenljive  $X$ :

$$np - q \text{ i } np - q + 1 = np + p,$$

to jest, onda je:

$$P_{\max} = P_{n,np-q,p} = P_{n,np+p,p}$$

Ako, međutim,  $np - q$  nije ceo broj, onda postoji jedinstvena modalna vrednost  $M_0$ , veća od  $np - q$  i manja od  $np + p$ . U tom slučaju moda  $M_0$  može kratko da se označi simbolom  $[x]$  — „najveći ceo deo broja  $x$ “:

$$M_0 = [np + p]$$

Sama verovatnoća modalne vrednosti binomne slučajne promenljive izračunava se prema formuli (2.6.1) za  $x = M_0 = np + p$ . Za velike vrednosti  $n$  može se približno uzeti  $M_0 \approx np$ , pa se pomoću Stirlingove formule ( $n! \approx \sqrt{2\pi n} \cdot n^n e^{-n}$ ) dobija:

$$\begin{aligned} P_{n,M_0,p} = P_{\max} &= \frac{n! p^{np} q^{n-np}}{(np)! (n-np)!} \approx \frac{\sqrt{2\pi n} \cdot n^n e^{-n} p^{np} q^{nq}}{\sqrt{2\pi np} (np)^{np} e^{-np} \sqrt{2\pi nq} (nq)^{nq} e^{-nq}} \approx \\ &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} = \frac{0,3989}{\sqrt{npq}} \end{aligned} \quad (2.6.3)$$

Parametri binomne raspodele jednaki su:

$$M(X) = np \quad (\text{primer 4, tačke 2.4.1}) \quad (2.6.4)$$

$$D(X) = npq \quad (\text{primer 6, tačke 2.4.2}) \quad (2.6.5)$$

$$K_A = \frac{q-p}{\sqrt{npq}} \quad (\text{zadatak 3, tačke 2.4.3}) \quad (2.6.6)$$

$$K_E = \frac{1-6p+6p^2}{npq} \quad (\text{zadatak 3, tačke 2.4.3}) \quad (2.6.7)$$

Ako je  $p = q = 0,5$ , binomna raspodela je simetrična (slika 2.6.1, b); ako je  $p < q$ , raspodela ima pozitivnu asimetriju (slika 2.6.1, a); a ako je  $p > q$ , asimetrija je negativna (slika 2.6.1, c). Kada  $n$  teži beskonačnosti vidi se da:

$$K_A \rightarrow 0 \text{ i } K_E \rightarrow 0$$

što je u saglasnosti s teoremom Muavra-Laplaza (glava III), prema kojoj binomna raspodela teži normalnoj raspodeli.

**Primer 1.** Naći najverovatniju vrednost binomne slučajne promenljive  $X$ , ako je: a)  $n = 39$ ,  $p = 0,935$  i b)  $n = 15$ ,  $p = \frac{1}{6}$ . U slučaju pod b) naći i verovatnoću modalne vrednosti.

**Rešenje.** a) Kako je  $np - q = 39 \cdot 0,935 - 0,065 = 36$  i  $np + p = 39 \cdot 0,935 + 0,935 = 37$ , to slučajna promenljiva  $X$  ima dve modalne vrednosti: 36 i 37.

b) Kako je  $np - q = 15 \cdot \frac{1}{6} - \frac{5}{6} = \frac{10}{6} = 1 \frac{4}{6}$  i  $np + p = 2 \frac{4}{6}$ , to je

$M_0 = [np + p] = \left[ 2 \frac{4}{6} \right] = 2$ . Verovatnoća ove modalne vrednosti je, prema obrascu (2.6.3), približno jednak:

$$P_{15,M_0,p} = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} = 0,276$$

**Primer 2.** Partija proizvoda sadrži 1 odsto škartova. Koliki treba da je uzorak da verovatnoća pojave bar jednog škarta u uzorku ne bude manja od 0,95.

**Rešenje.** Verovatnoća  $P_{n;x>1,p}$  može da se napiše u obliku:

$$P_{n;x>1,p} = 1 - P_{n,0,p} = 1 - q^n$$

Kako je, prema uslovu zadatka:

$$P_{n;x>1,p} \geq 0,95$$

imamo:

$$1 - q^n \geq 0,95$$

ili

$$q^n \leq 0,05$$

i

$$n \geq \frac{\log 0,05}{\log 0,95} \approx 29,8$$

**Primer 3.** U proizvodnji izvesnih proizvoda nalazi se 6 odsto neispravnih. Ako uzmemo uzorak od 5 proizvoda, kolika je verovatnoća da se među njima nadu tri neispravna proizvoda?

**Rešenje.** Kako je verovatnoća neispravnog proizvoda jednaka 0,06, treba izračunati verovatnoću  $P_{5;3;0,06}$ . Da bismo izračunali ovu verovatnoću možemo iskoristiti rekurentni obrazac (2.6.2) u obliku:

$$P_{n,x+1,p} = \frac{n-x}{x+1} \cdot \frac{p}{q} \cdot P_{n,x,p}$$

a onda izračunajmo najpre  $P_{5;0;0,06}$ :

$$P_{5;0;0,06} = (1 - 0,06)^5 = 0,94^5 = 0,734$$

Sledi, za  $x = 0$ :

$$P_{5;1;0,06} = \frac{5}{1} \cdot \frac{0,06}{0,94} \cdot 0,734 = 5 \cdot 0,0638 \cdot 0,734 = 0,234$$

za  $x = 1$ :

$$P_{5;2;0,06} = \frac{4}{2} \cdot 0,0638 \cdot 0,234 = 0,030$$

i za  $x = 2$ :

$$P_{5;3;0,06} = \frac{3}{3} \cdot 0,0638 \cdot 0,030 = 0,002$$

Radi efikasnijeg izračunavanja verovatnoća binomne raspodele verovatnoća koriste se tabele verovatnoća  $P_{n,x,p}$  za različite vrednosti  $n$ ,  $x$  i  $p$ . Tabela I, data u prilogu, daje verovatnoće  $P_{n,x,p}$  za  $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 20, 15, 20$  i 30 i za  $p = 0,1; 0,2; 0,3; 0,4$  i  $0,5$ . Zahvaljujući jednakosti:

$$P_{n,x,p} = P_{n,n-x,1-p} \quad (2.6.8)$$

iz ove tabele dobijaju se i verovatnoće  $P_{n,x,p}$  i za  $p > 0,5$ .

**Primer 4.** Neka se eksperiment, koji realizuje dogadjaj  $A$  s verovatnoćom  $P(A) = 0,7$ , ponovi  $n = 10$  puta. Naći verovatnoću da se događaj  $A$  pojavi  $x = 4$  puta.

**Rešenje.** U tabeli I nisu date verovatnoće  $P_{n,x,p}$  za  $p > 0,5$ , pa zato iskoristimo obrazac (2.6.8):

$$P_{10;4;0,7} = P_{10;10-4;1-0,7} = P_{10;6;0,3} = 0,036$$

**Primer 5.** Verovatnoća zastoja svakog od motora aviona jednaka je  $q$  (verovatnoća rada bez zastoja jednaka je  $p = 1 - q$ ), pri čemu motori otkazuju nezavisno jedan od drugog. Avion može da nastavi let samo u tom slučaju ako radi najmanje polovina njegovih motora. Za koje vrednosti  $q$  treba dati prednost dvomotorcu u odnosu na četvoromotorac?

**Rešenje.** Izračunajmo verovatnoće uspešnog leta dvomotorca i četvoromotorca. Označimo sa  $X$  broj motora u radu. Tada je:

$$P_2 = P(\text{uspešnog leta dvomotorca}) = P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - q^2$$

$$P_4 = P(\text{uspešnog leta četvoromotorca}) = P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - q^4 - 4pq^3 = 1 - 4q^3 + 3q^4$$

Kako je:

$$P_2 = P_4 \text{ za } q_1 = q_2 = 0, q_3 = 1 \text{ i } q_4 = \frac{1}{3}, \text{ to je (slika 2.6.2)}$$

$P_2 > P_4$  za  $\frac{1}{3} < q < 1$ . Praktično, verovatnoća zastoja motora aviona znatno je manja od  $\frac{1}{3}$ , pa je očigledno da četvoromotorcu treba dati prednost.

**Primer 6.** Dinar se bacă 100 puta. Kolika je verovatnoća da se grb dobije 50 puta?

**Rešenje.** Koristeći Stirlingovu formulu ( $n! \approx \sqrt{2\pi n} \cdot n^n e^{-n}$ ) imamo:

$$\begin{aligned} P_{100;50;0,5} &= \binom{100}{50} \left(\frac{1}{2}\right)^{50} \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{50} = \\ &= \frac{100!}{50! 50!} \cdot \frac{1}{2^{100}} \approx \frac{1}{5 \sqrt{2\pi}} \approx \\ &\approx \frac{1}{5} \cdot 0,4 = 0,08 \end{aligned}$$

### Z A D A C I

1. Pomoću tabele I konstruisati poligone raspodele verovatnoća za  $p = 0,3 = \text{const.}$  i  $n = 5, 10, 15$  i 20.

2. Neka je  $p = 0,01$  verovatnoća da sijalica pregri u toku prvih 20 časova rada. Naći verovatnoću da 10 takvih sijalica ne pregri u toku prvih 20 časova rada.

Rezultat  $0,99^{10} \approx 0,904$

3. Pet ispravnih dinara bačeno je odjednom. Naći raspodelu verovatnoća slučajne promenljive  $X$  koja označava broj grbova.

4. Ako je kocka bačena 3 puta, naći verovatnoću da se najmanje jednom pojavi pet ili šest tačaka.

Rezultat  $1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{19}{27} \approx 0,7$ .

5. Verovatnoća bar jedne realizacije događaja  $A$  u četiri nezavisna eksperimenta jednaka je 0,59. Naći verovatnoću pojave događaja  $A$  u jednom eksperimentu.

Rezultat 0,2

6. Binomna slučajna promenljiva  $X$ , koja označava broj realizacija događaja u  $n$  nezavisnih eksperimenta može se predstaviti u obliku zbiru:

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

gde je svaka od slučajnih promenljivih  $X_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) slučajna promenljiva Bernulijevog tipa (sa značenjem: broj realizacija događaja  $A$  u jednom eksperimentu):

$$X_i = \begin{cases} 1 & 0 \\ p & q \end{cases}$$

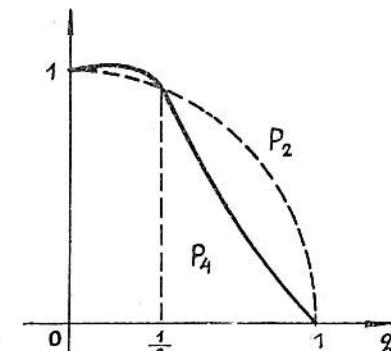
pri čemu je  $M(X_i) = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p$ ,  $M(X_i^2) = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot q = p$  i  $D(X_i) = M(X_i^2) - M^2(X_i) = p - p^2 = pq$ . Sledi:

$$M(X) = M\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n M(X_i) = np$$

$$D(X) = D\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n D(X_i) = npq$$

7. Ako  $X$  ima binomnu raspodelu sa  $p=0,5$ , naći verovatnoću da slučajna promenljiva  $X$  uzme vrednost unutar intervala  $\mu - \sigma < X < \mu + \sigma$  gde je  $\mu = M(X)$  i  $\sigma = \sqrt{D(X)}$ , ako je (a)  $n = 1$ , (b)  $n = 2$ , (c)  $n = 3$ , (d)  $n = 4$  i (e)  $n = 5$ .

Rezultat (a) 0, (b)  $\frac{3}{2}$ , (c)  $\frac{3}{4}$ , (d)  $\frac{3}{8}$ , (e)  $\frac{5}{8}$ .



Slika 2.6.2.

8. Ako se ispravan dinar baci 4 puta, kolika je verovatnoća da se najmanje dva puta povavi grb?

**Rešenje.** Broj grbova  $X$  ima binomnu raspodelu verovatnoća s parametrima  $n = 4$  i  $p = 0,5$ . Verovatnoća pojave najmanje dva grba jednaka je:

$$P_{4; x \geq 2; 0,5} = \sum_{x=2}^4 P_{4; x; 0,5} = \frac{6}{16} + \frac{4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{11}{16}$$

Verovatnoća pojave najmanje 4 grba u 8 bacanja dinara jednaka je:

$$\sum_{x=4}^8 \binom{8}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{8-x} = \frac{163}{256} < \frac{11}{16}$$

9. Uzorci, svaki po 8 artikala, formirani su na slučajan način iz velike partije u kojoj je 20 odsto neispravnih artikala. Naći najverovatniji broj neispravnih artikala u svakom od uzorka i verovatnoću ovog broja.

Za 100 uzoraka po 8 artikala izračunati broj uzorka u kojima može da se očekuje tri ili više neispravnih artikala.

**Rezultat** 1; 0,34; 20.

10. Radi kontrole određenih proizvoda na slučajan način je izdvojen uzorak od 50 proizvoda iz vrlo velike partije i u njemu je zapažen izvestan broj neispravnih proizvoda. Ako je ovaj broj neispravnih proizvoda veći od tri, partija se odbacuje; ako se u uzorku nalazi manje od tri neispravna proizvoda, partija se prihvata. Ako je neispravnih proizvoda tri, uzima se novi uzorak od 25 proizvoda i partija se odbacuje ako se u njemu nađe više od jednog neispravnog proizvoda. U suprotnom, partija se prihvata.

Ako se u partiji proizvodom nalazi 1 odsto neispravnih, odrediti sledeće verovatnoće:

- (a) da se partija prihvati posle kontrole proizvoda prvog uzorka;
- (b) da se izabere drugi uzorak i da se partija prihvati u rezultatu kontrole proizvoda drugog uzorka;
- (c) da se partija odbaci (uzeti  $0,99^{48} \approx 0,6173$ ).

**Rezultat** (a) 0,9862, (b) 0,0119, (c) 0,0019.

#### ✓ 2.6.4. Puasonova raspodela

Raspodela verovatnoća definisana zakonom raspodele verovatnoća:

$$\left. \begin{aligned} P_\lambda(x) &= \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, \lambda > 0 \\ \sum_{x=0}^{\infty} P_\lambda(x) &= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \cdot e^\lambda = 1 \end{aligned} \right\} \quad (2.6.25)$$

naziva se *raspodelom Puasona*. Ovu raspodelu je 1837. godine uveo Siméon Denis Poisson (1781–1840) kao granični slučaj binomne raspodele pod uslovom da je broj eksperimentata  $n$  veliki, a verovatnoća  $p$  pojave dogadaja  $A$  u svakom pojedinačnom eksperimentu (Bernulijevog tipa) mala.

**Teorema Puasona.** Ako u binomnoj raspodeli, definisanoj zakonom raspodele (2.6.1), za fiksirano  $x$  stavimo da  $n \rightarrow \infty$  i  $p \rightarrow 0$ , ali tako da je  $np = \lambda = \text{const}$ , onda binomna raspodela teži raspodeli Puasona definisanoj zakonom raspodele (2.6.25).

**Dokaz.** Iz uslova  $np = \lambda$  izlazimo  $p = \frac{\lambda}{n}$  i stavimo u binomni zakon raspodele, a zatim izvršimo sledeću transformaciju ovog zakona:

$$\begin{aligned} P_{n,x,p} &= \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-x+1)}{x!} \cdot \frac{\lambda^x}{n^x} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} = \\ &= \frac{\lambda^x}{x!} 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{x-1}{n}\right) \cdot \frac{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^x} \end{aligned}$$

Kada  $n \rightarrow \infty$ , onda izrazi  $1 - \frac{1}{n}$ ,  $1 - \frac{2}{n}, \dots, 1 - \frac{x-1}{n}$  i  $\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^x$  teže jedinicu, dok je:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda}} \right]^{-\lambda} = e^{-\lambda}$$

pa sledi:

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ p \rightarrow 0 \\ (np=\lambda)}} P_{n,x,p} = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{n,x,p} \frac{\lambda}{n} = P_\lambda(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

čime je dokazana teorema Puasona.

Tabela 1 pokazuje da je i za male vrednosti  $n$  aproksimacija binomne raspodele Puasonovom raspodelom dosta dobra. Ova aproksimacija ima veliki praktičan značaj s obzirom na to da su izračunavanja binomnih koeficijenata za velike vrednosti  $n$  nepogodna.

TABELA 1. APROKSIMACIJA BINOMNE RASPODELE PUASONOVOM

x	Binomna raspodela			Puasonova raspodela $\lambda = 1$
	$n = 4, p = \frac{1}{4}$	$n = 8, p = \frac{1}{8}$	$n = 100, p = \frac{1}{100}$	
0	0,316	0,344	0,366	0,368
1	0,422	0,393	0,370	0,368
2	0,211	0,196	0,185	0,184
3	0,047	0,056	0,061	0,061
4	0,004	0,010	0,015	0,015
5	—	0,001	0,003	0,003

Aproksimacija binomne raspodele Puasonovom je utoliko bolja ukoliko je  $n$  veće (praktično, za  $n \geq 50$ ) i  $p$  manje (praktično, za  $p \leq 0,1$ ).

Odnos verovatnoća  $P_\lambda(x)$  za dve uzastopne vrednosti  $x$  jednak je:

$$\frac{P_\lambda(x)}{P_\lambda(x-1)} = \frac{\lambda}{x} \quad (2.6.26)$$

odakle proizlazi da je:

$$\begin{aligned} P_\lambda(x) &< P_\lambda(x-1) && \text{ako je } x > \lambda, \\ P_\lambda(x) &= P_\lambda(x-1) && \text{ako je } x = \lambda, \\ P_\lambda(x) &> P_\lambda(x-1) && \text{ako je } x < \lambda, \end{aligned}$$

to jest, vidi se da verovatnoće  $P_\lambda(x)$  rastu kad se  $x$  menja od 0 do  $[\lambda]$ , a dalje opadaju, što znači da je moda  $M_0$  jednaka  $[\lambda]$ . Ako je  $\lambda$  ceo broj, onda postoje dve maksimalne verovatnoće  $P_\lambda(\lambda) = P_\lambda(\lambda - 1)$ .

Iz odnosa (2.6.26) dobija se i rekurentni obrazac:

$$P_\lambda(x) = \frac{\lambda}{x} P_\lambda(x-1) \quad (2.6.27)$$

koji je pogodan za izračunavanje verovatnoća Puasonove raspodele. Kako je početna verovatnoća jednaka  $P_\lambda(0) = e^{-\lambda}$ , to iz praktičnih razloga dajemo tabelu vrednosti  $e^{-\lambda}$  za različite vrednosti  $\lambda$ .

TABELA 2. VREDNOSTI  $e^{-\lambda}$

$\lambda$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$e^{-\lambda}$	1,000	0,905	0,819	0,741	0,670	0,607	0,549	0,497	0,449	0,407
$\lambda$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$e^{-\lambda}$	0,368	0,135	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,00033	0,00012	0,000045

Neposredno izračunate verovatnoće Puasonove raspodele date su u tabeli II, u prilogu, za iste ove vrednosti  $\lambda$  koje su naznačene u ovde navedenoj tabeli.

Funkcija izvodnica slučajne promenljive  $X$ , koja ima Puasonovu raspodelu verovatnoća, jednaka je (tačka 2.5.1):

$$g_x(t) = M(e^{tx}) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^x}{x!} = e^{\lambda(e^t - 1)} \quad (2.6.28)$$

Kako su prvi i drugi izvod funkcije izvodnice jednak:

$$g_x'(t) = \lambda e^t e^{\lambda(e^t - 1)}, \quad g_x''(t) = \lambda e^t \cdot e^{\lambda(e^t - 1)} (1 + \lambda e^t)$$

to je matematičko očekivanje slučajne promenljive  $X$  jednako:

$$M(X) = g_x'(0) = \lambda \quad (2.6.29)$$

Momenat drugog reda  $M(X^2)$  jednak je:

$$M(X^2) = g_x''(0) = \lambda + \lambda^2$$

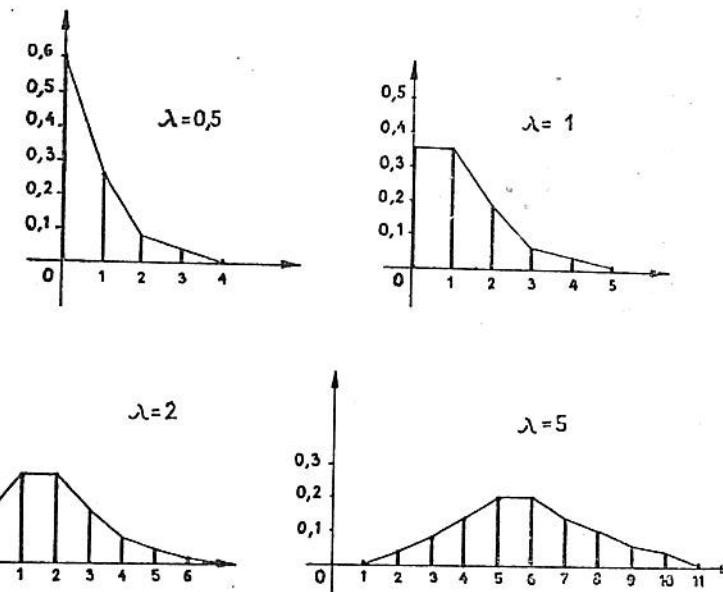
pa je disperzija slučajne promenljive  $X$ :

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \lambda \quad (2.6.30)$$

Koefficijenti asimetrije i ekscesa jednak su (tačka 2.4.3):

$$K_A = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}, \quad K_E = \frac{1}{\lambda} \quad (2.6.31)$$

Vidimo da Puasonova raspodela ima pozitivnu asimetriju. Kako  $K_A \rightarrow 0$  kad  $\lambda \rightarrow \infty$ , proizlazi da Puasonova raspodela postaje skoro simetrična za velike vrednosti  $\lambda$ . Na slici 2.6.3 vidi se da već za  $\lambda = 5$  Puasonova raspodela verovatnoća postaje simetrična.



Sl. 2.6.3. Poligoni raspodele Puasona za različite vrednosti  $\lambda$

Puasonova raspodela ima široku primenu u demografiji, biologiji, fizici, astronomiji, lingvistici, saobraćaju, telefoniji i dr.

**Primer 1.** Ovaj primer dao je poljski matematičar Bortkijević i odnosi se na frekvencije godina prema broju poginulih vojnika u 10 pukova pruske vojske od udaraca konja, u periodu od 1875. do 1894. godine. Bortkijević je Puasonov zakon raspodele verovatnoća nazvao „zakonom malih brojeva“ misleći više na „zakon retkih događaja“.

U tabeli 3 upoređene su empirijske frekvencije s teorijskim, koje su izračunate pomoću procenjene vrednosti  $\lambda$ . Kako je  $\lambda = M(X)$ , to jest, kako je  $\lambda$  srednja vrednost slučajne promenljive  $X$ , ona se, kao što ćemo videti u statistici, može približno oceniti aritmetičkom sredinom:

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} \approx M(X) = \lambda \quad (2.6.32)$$

gde  $f_t$  označava empirijske frekvencije odgovarajućih vrednosti slučajne promenljive  $X$ , koje su dobijene posmatranjem. Konkretno, u ovom primeru, imamo:

$$\lambda \approx \bar{x} = \frac{1}{200} (0 \cdot 109 + 1 \cdot 65 + 2 \cdot 22 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 0) = 0,61 \approx 0,6$$

Sada se iz tabele II čitaju odgovarajuće verovatnoće Puasonove raspodele:

$$\begin{aligned} P_{0,6}(0) &= 0,5488; & P_{0,6}(1) &= 0,3293; & P_{0,6}(2) &= 0,0988; \\ P_{0,6}(3) &= 0,0198; & P_{0,6}(4) &= 0,0030; & P_{0,6}(5) &= 0,0004. \end{aligned}$$

Množenjem ovih verovatnoća sa zbirom svih frekvencija, ovde sa 200, dobijamo takozvane „teorijske frekvencije“, koje uporedujemo s empirijskim. Testove za verifikaciju saglasnosti empirijske i teorijske raspodele frekvencija daćemo u statistici, a ovde samo vizuelno uočavamo da je razlika između empirijskih i teorijskih frekvencija neznatna.

TABELA 3 (L. V. BORTKIEWICZ, DAS GESETZ DER KLEINEN ZAHLEN, 1898)

Broj poginulih vojnika u toku godine: $x$	Broj godina kada je poginulo $x$ vojnika: $f_i$	Teorijske frekvencije $f_{it} = NP(x) = 200 P_{0,6}(x)$
0	109	$200 \cdot 0,5488 = 109$
1	65	$200 \cdot 0,3293 = 66$
2	22	$200 \cdot 0,0988 = 20$
3	3	$200 \cdot 0,0198 = 4$
4	1	$200 \cdot 0,0030 = 1$
5	0	$200 \cdot 0,0004 = 0$

Primer 2. Broj alfa čestica (E. Rutherford and H. Geiger, Phil. Mag. (6) 20, 1910, 698).

TABELA 4

$x$	Broj intervala dužine 7,5 sekundi sa $x$ čestica po intervalu	
	Empirijske frekvencije	Teorijske frekvencije
0	57	54
1	203	210
2	383	407
3	525	526
4	532	509
5	408	394
6	273	254
7	139	140
8	45	68
9	27	29
10	10	11
11	4	4
12	2	1
13	0	1

Primer 3. Raspodela vozila na ulici u Gracu (Austrija), 9. septembra 1963, od 10 časova i 20 minuta do 11 časova i 10 minuta.

TABELA 5

$x$	Broj intervala vremena dužine 30 sekundi sa $x$ vozila po intervalu	
	Empirijske frekvencije	Teorijske frekvencije
0	6	6
1	18	17
2	21	24
3	26	22
4	16	15
5	8	9
6	2	4
7	1	2
8	2	1
9	0	0

Primer 4. U vreme od 14 do 16 časova od ponedeljka do petka u intervalima od 5 minuta kontrolisan je parking sa 48 jednočasovnih mesta. Momenat zapažanja tokom svakog petominutnog intervala izabran je na slučajan način. Svako zapažanje sastoji se od broja praznih mesta. Iz tabele 6 vidi se da se, kao i u prethodnim primerima, empirijske frekvencije petominutnih intervala vremena, kad je uočeno  $x$  praznih mesta, neznatno razlikuju od teorijskih frekvencija izračunatih po Puasonovom zakonu raspodele verovatnoća.

TABELA 6

$x$	Broj uočenih slobodnih jednočasovnih parking mesta	
	Empirijske frekvencije	Teorijske frekvencije
0	29	25,1
1	42	39,3
2	21	30,1
3	16	16,4
4	7	6,4
5	2	2,0
6	3	0,5
7	0	0,2
$N = 120$		120,0

Slučajna promenljiva  $X$  je broj praznih mesta na parkingu. Možemo sada da izračunamo  $\lambda \approx \frac{1}{120} (0 \cdot 29 + 1 \cdot 42 + \dots + 6 \cdot 3 + 7 \cdot 0) = \frac{188}{120} = 1,567 \approx 1,6$  verovatnoću da se nađe najmanje jedno slobodno mesto na parkingu u vremenu od 14 do 16 časova:

$$P_{1,6}(X \geq 1) = 1 - P_{1,6}(0) = 1 - e^{-1,6} = 1 - 0,202 = 0,798$$

**Primer 5.** Puasonov zakon raspodele vozila na putu.<sup>1)</sup> Za proučavanje kretanja vozila na drumovima najprikladniji je aparat matematičke statistike. Matematička statistika je u ovim proučavanjima prvi put primenjena još pre trideset godina. Međutim, značajnija proučavanja izvedena tek posle II svetskog rata. Amerikanac O. K. Norman<sup>2)</sup> je 1942. godine eksperimentalnim putem uočio slaganje empirijske raspodele intervala vremena između uzastopnih vozila i teorijske krive tih intervala po Puasonovom zakonu. Kasnije su i drugi naučnici utvrdili ovu saglasnost i, pri tom, došli do novih rezultata. Tako je sovjetski profesor A. K. Birulja<sup>3)</sup> eksperimentima utvrdio da je pri intenzitetu od 200 do 400 vozila na sat ovo slaganje potpuno, ako se za jedinicu posmatranja uzme 10 sekundi. U slučaju većeg broja vozila ovo slaganje je bolje ukoliko se za vremensku jedinicu posmatranja uzme interval od 5 sekundi.

Polazeći od logičkih postavki u ovom primeru su dokazani zaključci koji su eksperimentima bili verificirani.

Veoma je retko da na putu potok vozila ima izgled guste i ujednačene kolone. Brzine vozila su različite i odstojanja između njih veoma promenljiva. Ako je na putu intenzitet kretanja 600 vozila na sat, to znači da u proseku prolazi po jedno vozilo svakih 6 sekundi. Međutim, praktično, više vozila mogu proći jedno mesto na putu i u razmaku od jedne sekunde, ali mogu da proteknu i intervali od jednog minuta i više a da ne prode nijedno vozilo.

Kao što se momenti pojavlivanja vozila na jednom mestu redaju na slučajan način, tako isto je i vremenski interval između dva vozila slučajna promenljiva veličina. Osnovni je zadatak da se nađe zakonitost redanja momenata prolaza vozila na jednom posmatranom mestu puta, ili, što je isto, da se nađe raspodela verovatnoće slučajne promenljive koja karakteriše vremenske razmake između vozila, odnosno da se verificira hipoteza o saglasnosti empirijske raspodele frekvencija s pretpostavljenom teorijskom raspodelom verovatnoće. Proučavanje raspodele frekvencija vremenskih razmaka između vozila ima neposredno praktično značenje. Ako, na primer, ispitujemo mogućnost prelaženja puta većeg značaja osnovno je ustanoviti učestalost vremenskih razmaka ne manjih po dužini trajanja od vremena potrebnog za prelaženje tog puta. Poznavanje ove učestalosti vremenskih „šupljina“ između vozila na putu većeg značaja omogućava donošenje zaključaka o veličini intenziteta na putu manjeg značaja, odnosno poznavanje ove učestalosti obrazlaže potrebu konstrukcije raskrsnice u dva nivoa.

Neka za interval vremena  $T$  prode posmatranim putem  $N$  vozila. Za praksi je značajno odgovoriti na sledeća pitanja:

1. Koliko vozila prolazi u određenom intervalu vremena  $t$  ( $t < T$ )?
2. Kolika je učestalost vremenskih razmaka između vozila veličine  $t_0$  ( $t_0 < T$ )?

Odgovor na ova pitanja je jedinstven i sastoji se u nalaženju raspodele verovatnoće slučajnog broja vozila koja prolaze posmatranim putem za vreme  $t$ . Radi toga potražimo verovatnoće:

$$p_x = P_x(t), \quad (t < T)$$

<sup>1)</sup> Ovaj primer uzet je iz autorovog članka „Puasonova raspodela verovatnoće u primeni na probleme saobraćaja“, Saobraćaj, Tehnika, 1967, No. 1, str. 146–148.

<sup>2)</sup> Norman O. K. Results of highway capacity studies. Public Roads. 1942, VI.

<sup>3)</sup> Birulja A. K. Učet neravnomernoj intenzivnosti dvizjenija pri projektovanju avtomobilnih dorog, Izvestija vuzov, Stroiteljstvo i arhitektura, Moskva, 1959, No. 2(8).

to jest, verovatnoće da  $x$  vozila prođe za interval vremena  $t$  preko jednog poprečnog preseka posmatranog puta.

Pretpostavimo da je verovatnoća pojave jednog vozila na intervalu  $\Delta t$  ( $\Delta t < T$ ) proporcionalna ovom vremenu:

$$p_1 = p_1(\Delta t) = a \Delta t \quad (1)$$

gde veličinu  $a$  smatramo konstantnom za date vrednosti veličina  $N$  i  $T$ . Da bi se za vreme  $t$  pojavila dva vozila neophodno je da se posle prvog pojavi i drugo vozilo do kraja intervala vremena  $\Delta t$ . Dogadaj nailaska jednog vozila ne utiče na dogadaj nailaska drugog vozila, to jest ova dva dogadaja su nezavisna. Zato je verovatnoća  $p_2 = p_2(\Delta t)$  — pojave dva vozila za interval vremena  $\Delta t$  — jednak proizvodu verovatnoća pojave jednog i pojave drugog vozila u tom intervalu vremena. Na taj način, ako je interval vremena  $\Delta t$  beskonačno mala veličina, onda je veličina  $p_2 = p_2(\Delta t)$  beskonačno mala veličina drugog reda u odnosu na  $\Delta t$ . Slično su veličine  $p_3(\Delta t)$ ,  $p_4(\Delta t)$ , ... beskonačno male veličine trećeg, četvrtog reda itd.

Ako u jednakosti:

$$p_0(\Delta t) + p_1(\Delta t) + p_2(\Delta t) + p_3(\Delta t) + \dots = 1 \quad (2)$$

zanemarimo zbir:

$$p_2(\Delta t) + p_3(\Delta t) + \dots$$

dobijamo:

$$p_0(\Delta t) = 1 - p_1(\Delta t) \quad (3)$$

ili, s obzirom na relaciju (1), verovatnoća da se ne pojavi nijedno vozilo za vreme  $\Delta t$  glasi:

$$p_0(\Delta t) = 1 - a \Delta t \quad (4)$$

Sada možemo izračunati verovatnoću  $p_0(t)$  da se u toku vremena  $t$  ne pojavi nijedno vozilo, to jest, verovatnoću da „šupljina“ između vozila bude  $t$ . Radi toga uočimo nešto veći interval vremena  $t + \Delta t$  i izračunajmo verovatnoću  $p_0(t + \Delta t)$ , to jest, verovatnoću da se u tom intervalu vremena ne pojavi nijedno vozilo. Očigledno, da se nijedno vozilo ne pojavi u intervalu vremena  $t + \Delta t$  potrebno je da se nijedno ne pojavi ni u intervalu vremena  $t$  ni u intervalu vremena  $\Delta t$ . Prema teoremi o verovatnoći proizvoda nezavisnih dogadaja i prema formuli (4), dobijamo:

$$p_0(t + \Delta t) = p_0(t) \cdot p_0(\Delta t) = p_0(t)(1 - a \Delta t) \quad (5)$$

S druge strane, prema teoremi Lagranža, imamo:

$$p_0(t + \Delta t) \approx p_0(t) + \frac{dp_0(t)}{dt} \cdot \Delta t \quad (6)$$

Iz relacija (5) i (6) dobija se diferencijalna jednačina:

$$\frac{dp_0(t)}{dt} + a p_0(t) = 0$$

Uz početni uslov  $p_0(0) = 1$ , koji sledi iz relacije (3), rešenje ove diferencijalne jednačine glasi:

$$p_0(t) = e^{-at}$$

Na sličan način izračunavamo i verovatnoću  $p_x(t)$ , ( $x \geq 1$ ) da za vreme  $t$  prođe  $x$  vozila na jednom mestu posmatranog puta. Radi toga uočimo nešto veći interval vremena  $t + \Delta t$  i izračunajmo verovatnoću  $p_x(t + \Delta t)$ . Moguće su sledeće alternativne pretpostavke:

- ili će se u intervalu vremena  $t$  pojaviti  $x$  vozila, a u intervalu  $\Delta t$  nijedno,
- ili će se u intervalu vremena  $t$  pojaviti  $x - 1$  vozilo, a u intervalu vremena  $\Delta t$  jedno,
- ili ...
- ili se neće u intervalu vremena  $t$  pojaviti nijedno vozilo, a u intervalu vremena  $\Delta t - x$  vozila.

S obzirom na nezavisnost i uzajamnu isključivost ovih događaja, prema osnovnim teorema za verovatnoću zbiru i proizvoda događaja, dobijamo:

$$p_x(t + \Delta t) = p_x(t) \cdot p_0(\Delta t) + p_{x-1}(t) \cdot p_1(\Delta t) + \dots + \dots + p_0(t) p_x(\Delta t)$$

Zanemarujući verovatnoće beskonačno male drugog i viših redova, iz poslednje jednakosti se dobija približna jednakost oblika:

$$p_x(t + \Delta t) \approx p_x(t) \cdot p_0(\Delta t) + p_{x-1}(t) \cdot p_1(\Delta t)$$

ili, ako zamenimo vrednosti za  $p_1(\Delta t)$  i  $p_0(\Delta t)$  iz relacija (1) i (4), dobijamo:

$$p_x(t + \Delta t) \approx p_x(t) (1 - a \Delta t) + p_{x-1}(t) \cdot a \Delta t \quad (10)$$

S druge strane, prema teoremi Lagranža, imamo:

$$p_x(t + \Delta t) \approx p_x(t) + \frac{dp_x(t)}{dt} \cdot \Delta t \quad (11)$$

Iz relacija (10) i (11) dobija se diferencijalna jednačina rekurentnog karaktera ( $x = 1, 2, \dots$ ):

$$\frac{dp_x(t)}{dt} + a p_x(t) = a p_{x-1}(t) \quad (12)$$

Rešavajući redom diferencijalne jednačine (12) za  $x = 1, 2, \dots$ , dobija se rešenje oblika:

$$p_x = p_x(t) = \frac{(a t)^x \cdot e^{-at}}{x!} \quad (13)$$

Na taj način, zakon raspodele verovatnoće broja vozila je Puasonov zakon raspodele verovatnoće. Veličina  $a$  ima značenje srednje frekvencije vozila na posmatranom putu za vreme  $T$ :  $a = \frac{N}{T}$ . Zbog toga formula (13) postaje:

$$p_x(t) = \frac{\left(\frac{Nt}{T}\right)^x e^{-\frac{Nt}{T}}}{x!} \quad (14)$$

Iz formule (14) sledi formula za verovatnoću da se za vreme  $t$  ne pojavi nijedno vozilo:

$$p_0(t) = e^{-\frac{Nt}{T}} \quad (15)$$

### Z A D A C I

1. Pokazati da je odnos  $\frac{\mu}{\sigma^2} = \frac{M(X)}{D(X)}$  kod binomne raspodele veći od jedinice, kod Puasonove raspodele jednak jedinici, a kod negativne binomne raspodele manji od jedinice. Ova karakteristika može da posluži kao kriterijum za raspoznavanje raspodele prema osnovnim parametrima.

2. Matematičko očekivanje i disperziju kod Puasonove raspodele izvesti neposredno iz definicije matematičkog očekivanja  $M(X) = \sum_{x=1}^{\infty} x P_x(x)$ , drugog momenta  $M(X^2) = \sum_{x=1}^{\infty} x^2 P_x(x)$  i veze  $D(X) = M(X^2) - M^2(X)$ .

3. Ako je u proizvodnji izvesnih artikala 20 odsto neispravnih, naći verovatnoću da se u uzorku od 100 artikala nadu: a) tri neispravna b) najmanje tri neispravna.

**Rezultat**  $\lambda = 100 \cdot 0,02 = 2$  a) 0,180 b) 0,325

4. Složeni mehanizam sastoji se od 2000 podjednako pouzdanih elemenata. Verovatnoća zastoja za svaki deo iznosi 0,0005. Naći verovatnoću da mehanizam otkaze u radu ako zastoj mehanizma nastaje kada otkaze bar jedan elemenat.

**Rezultat**  $p = 1 - e^{-1} \approx 0,63$

5. Raspodela verovatnoće broja vozila  $x$  koja prolaze jednu tačku na putu u intervalima od jednog minuta, može da se uzme kao Puasonova raspodela s parametrom  $\lambda$ . Ako je srednji broj vozila koja za minut prođu jednak 2, naći verovatnoću da u jednom minuti prođe: a) jedno vozilo, b) manje od tri vozila. Izračunati takođe najmanju vrednost za  $v$  tako da verovatnoća da  $x$  bude manje ili jednak  $v$  bude veća od 0,5.

**Rezultat** 0,271; 0,677; 2.

6. Na tabeli je prikazan broj nesrećnih slučajeva dnevno u jednoj fabriči, u toku 200 dana.

Broj nesrećnih slučajeva dnevno	0	1	2	3	4	5	6
Broj dana	130	51	12	4	2	1	0

Izračunati srednji broj nesrećnih slučajeva dnevno (videti primer 1). Iskoristiti Puasonovu raspodelu s ovom srednjom vrednošću i izračunati verovatnoću da se jednog dana dogode tri ili više nesrećnih slučajeva.

**Rezultat** 0,5; 0,0144.

7. Procent škarta u partiji proizvoda je nepoznat. Može li se s verovatnoćom većom od 0,90 tvrditi da je taj procent manji od 2, ako je u uzorku od 100 proizvoda nadeno 7 škartova.

**Rešenje.** Uz pretpostavku da je  $p = 0,02$  ( $\lambda = 100 \cdot 0,02 = 2$ ) imamo:

$$P_2(x > 0) = 0,765 < 0,90$$

Znači, kada u partiji proizvoda ne bi bilo nijednog škarta, u tom slučaju ne bismo mogli da tvrdimo s verovatnoćom većom od 0,90 da je verovatnoća škarta manja od 0,02. Za  $n = 100$  i  $p = 0,02$  dobija se da je verovatnoća pojave broja škartova većeg od 6 jednak 0,005. Na taj način, prihvava-

tajući hipotezu da je  $p \leq 0,02$  kao tačnu, morali bismo da prihvatimo da se realizovao malo verovatan dogadjaj. Odavde sledi zaključak da se može smatrati da je verovatnoća škarta veća od 0,02.

8. Diskrete slučajne promenljive  $X_1, X_2, \dots, X_n$  su nezavisne i imaju Puasonove raspodele s parametrima  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Pokazati da je njihov zbir  $X_1 + X_2 + \dots + X_n$  takođe potičenjen zakonom Puasona s parametrom  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$ .

**Dokaz.** Dokažimo to najpre za zbir dveju slučajnih promenljivih  $X_1$  i  $X_2$ . Radi toga uočimo:

$$\begin{aligned} P(X_1 + X_2 = x) &= \sum_{k=0}^x P(X_1 = k) P(X_2 = x - k) = \sum_{k=0}^x \frac{\lambda_1^k e^{-\lambda_1}}{k!} \cdot \frac{\lambda_2^{x-k} e^{-\lambda_2}}{(x-k)!} = \\ &= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{x!} \sum_{k=0}^x \frac{x! \lambda_1^k \lambda_2^{x-k}}{k!(x-k)!} = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^x}{x!} \cdot e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \end{aligned}$$

čime smo dokazali da slučajna promenljiva  $X_1 + X_2$  ima Puasonovu raspodелу s parametrom  $\lambda_1 + \lambda_2$ . Uopštenje ovog rezultata izvodi se indukcijom.